

Теорија хаоса

Иван Вукадиновић

Тамо где Хаос почиње, класична наука престаје. Наука је живела у незнању у вези са нередом у атмосфери, ускомешаном мору, флукуацијама живих бића, осцилацијама у срцу и мозгу. Сада наука види Хаос у свему – дим цигарете, танак разиђе се у мноштво кривуљица; капљање воде из чесме; метеорологија, никад сасвим предвидљива; понашање авиона у лету... Још увек преовладава склоност ка редукционизму, али Теорија хаоса поставља тренд посматрања целине.

Релативност је избрисала њутновску илузију о апсолутном простору и времену, квантна физика је срушила сан да се мерења контролишу, а Хаос елиминише лапласовску фантазију о детерминистичкој предвидљивости.

Коначно је питање – како уопште настаје ред у једном свемиру који је у власти ентропије, који због тога клизи ка тоталном расулу?!

Све је почело од Алана Тјуринга, великог математичара који је дао основе вештачке интелигенције – чувени тест да ли је машина разумна. 1952. објавио је рад о морфогенези. Математичка формула, по њему, дефинише развој живог бића само-организацијом. Једначина је веома једноставна, али рађа комплексност... И сасвим једноставне једначине могу моделовати системе који по својој ускомешаности нимало не заостају за водопадом. То је познати Ефекат лептира.

Одавно је познато да мале ствари могу низом догађаја изазвати велике проблеме, ево шта каже једна енглеска средњовековна песма:

*Због једног ексера отпала је потковица
Због потковице изгубљен је коњ
Због коња изгубљен је и јахач
Због тог јахача изгубљена је битка
Због те изгубљене битке – пала је краљевина*

Узмимо, на пример, Навиер-Стоуксову једначину, све се своди на њу у динамици флуида. Карактер једначине мења се истовремено у свим релевантним аспектима. Она је право чудо сажетости, али нелинеарна.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}.$$

Једначина описује кретање флуидних супстанци, користи се за моделовање времена, морских струја, протока воде у цевима и ваздуха над авионским крилом...

Нема једноставнијег система од клатна, рекло би се да нема система више детерминистичког. Али у реалном свету, где трење успорава клатно, потребан је неки механизам да подстиче на даље кретање. Испоставља се да осцилације никада нису сасвим исте, нити сасвим периодичне. Осцилације у природи тако функционишу. Физичар не би могао да разуме турбуленцију или сложеност, ако не би схватио клатна.

Потребно је разјаснити да су хаос и нестабилност две различите ствари. Хаотичан систем може да буде стабилан ако његова специфична неправилност остаје у малим границама. Робустан, али чудноват.

Требало је да прође време после Тјуринга да би се Хаос даље упознао. Занимљива је подударност да је развој области битно везан за све јаче рачунарске машине, којима је између осталих кумовао сам Тјуринг. Развој рачунарства дао је наде да ће време моћи тачно да се предвиди, можда на исто да се утиче. Теорија хаоса показале да су те наде биле неосноване.

Даљи развој области везан је за Лос Аламос, у великој мери независно од Тјуринга. Уопште, научници су засебно долази до битних знања Теорије хаоса. Дакле, у овој националној лабораторије Америке далеко у дивљини, познатој по Менхетн пројекту. И

данас се баве безбедношћу и поузданошћу нуклеарног оружја. Чувају се опасне ствари, што сазнамо кад избије шумски пожар у близини. Тамо је канцеларија за контрашпијунажу, нуклеарна форензика (уочавање проба нуклеарног оружја било где на планети), проучавање хелиосфере, компјутерска симулација понашања океана, чак пројекат вакцине против сиде засноване на мозаик протеинима – састављене од мноштва мањих протеина.

На теоретском одељењу, користећи јефтин рачунар HP-65, јер теоретска истраживања су заостајала својим буџетом за војним, Фајгенбаум је добио свој први број 4,669. Тада није могао израчунати више децимала. Питао се шта тај број значи, како га комбиновати са π или e . Али вратимо се метеорологији.

Едвард Лоренц се пре тога на МИТ-у играо са не много јачим рачунаром, пуштајући симулације крајње поједностављених диференцијалних једначина које су давале неку идеалну климу. Једном је, да би уштедео у времену, симулацију почео од средине, откуцавши уместо шест децимала само три. Ефекат лептира је разоткривен.

Роберт Меј је испитивао једначину која показује како се животињска популација мења током времена.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

И овде је уочен Ефекат лептира. И најједноставније једначине могу имати скривено понашање. Слика о васиони као сатном механизму је варка. Мртва је замислио да математичка једначина може егзактно предвидети понашање система.

Не само у научном истраживању, него и у свакидашњем свету политике и економије, сви ћемо боље пролазити ако се повећа број људи који схватају да прости нелинеарни системи не испољавају увек просте динамичке особине – рекао је Роберт Меј.

Долазимо до горостаса ове области, човека који је открио фрактале и најчуднији дијаграм за који математика зна. То је Беноа Манделброт. За разлику од већине математичара, са проблемима се суочавао кроз интуитивни увид у обрасце и облике. Није имао много поверења у анализу. *Свака поједина промена је насумична и непредвидива. Али начин на који се нижу промене исти је за велике и мале интервале. Зато кажемо да је Хаос есенција Реда.* Варијабилност цена памука била је константна током светских ратова и економске кризе. Исти принцип важи за шуме у комуникацијама, стање водостаја и друге проблеме. Могли би бити представљени чудним облицима већ познатим математичарима – као што је Канторова прашина.

Манделброт је поставио питање колико је дугачка обала Британије. Одговорио је да зависи од дужине метра којом је меримо – теоретски може бити бесконачно дугачка. Тако је дошао до чудне идеје димензија у разломцима, а не како сви знамо – 0,1,2,3... У зиму 1975. листао је уџбеник латинског свог сина и нашао назив за ту појаву – *фрактал*.

Идеја да нумерички резултат зависи од односа посматрача према посматраном предмету у потпуности је у духу физике XX века. Самослично понављање јесте симетрично, али не у односу на осу симетрије, него у односу на промену размера. Таква симетрија значи поновно враћање себи, искрсавање истог унутар истог, унутар истог обрасца...

Природа тако функционише. Разграната мрежа капилара објашњава *синдром млетачког трговца* – не само да не можеш без проливања крви са човека одсећи „фунту меса“, не можеш ни милиграм! Фрактална је природа алвеола у плућима, уринарног система, влакана у срцу која преносе импулсе.

Таква архитектура је компликована само из угла еуклидовске геометрије. Опис је веома прост, чиста једноставност. Довољно је само неколико бајта информација, једна линија кода! Сасвим је сигурно да ДНК не садржи огромне количине информација да би се описала свака алвеола, бронхија, капилар... Али садржи информације *како се обавља процес* бифуркација и развоја.

С тим у вези је тзв. *чудни атрактор*, један од најмоћнијих проналазака модерне науке. Он живи у фазном простору као орбита која к себи привлачи друге блиске путање развоја система. У прошлости се појам хаос односио на физичке системе са великим бројем

променљивих – степена слободе. Сада видимо како хаос осваја и једноставне нелинеарне системе.

Вратимо се популационој једначини која је, видели смо, веома једноставна итерација са једном промењивом и једним параметром. У зависности од величине параметра R_n имаћемо број различитих вредности око којих ће се популација груписати. Да ли ће тежити једном броју, осциловати око два, четири, осам – за сваку нову вредност параметра дупло више. И онда се улази у неповратан хаос где кретање популације више не може бити периодично. Однос разлика суседних параметара је управо Фајгенбаумова константа и исти је за свако n . Увек је исто:

$$(r_n - r_{n-1}) / (r_{n+1} - r_n)$$

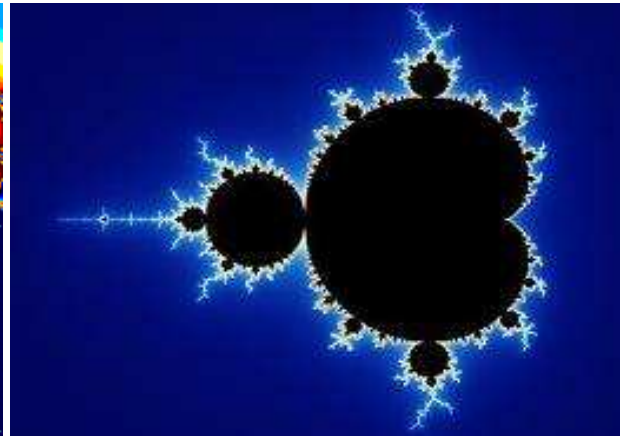
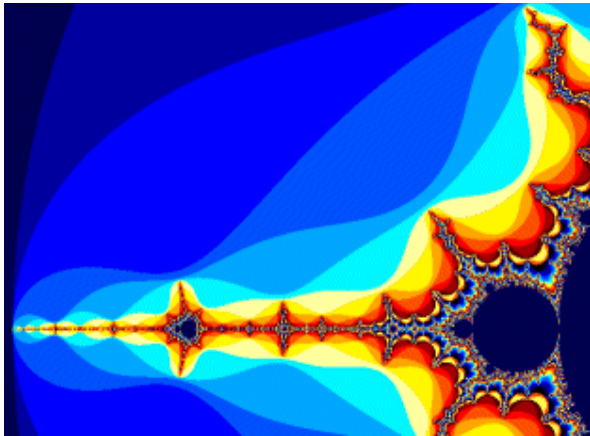
Али одакле све то?!? Фајгенбаумови циклуси од 2,4,8,16... Они се не појављују „ниоткуд“, већ пресецају линију реалних бројева – овај видљиви свет. Сви ти облици проистичу из ширег скупа комплексних бројева. У комплексној равни је огромна констелација циклуса и многи феномени ће тек бити објашњени тим циклусима. То већ делује некако интуитивно јасно.

У комплексној равни је крајње компликован, а опет веома једноставан Манделбровов скуп. Он није потпуно самосличан, као фрактали. Не, улажењем у све веће размере искрсавају све нови детаљи. Математичар сер Роџер Пенроуз овако описује путовање у свет Манделбрововог скупа – увећањем се појављују нови облици: сусрет са непознатим, кукац или планинско језеро, нови континент, чудна брадавица, долина морског коњица, корални гребен, плодни сусрет спирала... А све настаје крајње једноставним формулом над комплексним бројевима где се број диже на неки степен и сабира са константом: $z \rightarrow z^n + c$. Када су проучавани дијаграми фазних транзиција приликом магнетисања материјала просто је искочио предивни Манделбровов скуп. Тада је доказано постојање магије!

Коришћење насумичног алгоритма приликом налажења неког фракталног облика не значи да је он сам насумичан. Не, увек се нацрта иста слика. Систем је детерминистички, али се не може предсказати шта ће следеће учинити! То је спонтано израћање само-организације. Чудни атрактори су моћни миксери. Производе непредвидљивост. Повећавају ентропију. И стварају информације где никаквих информација није било. Стварно чудно, али тако је!

Детерминистички хаос вуче хиљаде тачкица у препознатљиве обрасце. Неред има безброј могућих путања, али природа воли само мали број њих. То важи и за медицину. Традиционални методи лечења за најнестабилније, безброј-димензионалне живе машине, јесу линеарни и редукционистички. То је веома погрешно, као и сам појам стабилности у живим системима. Што би рекао Мендел – *У биологији, кад сте стигли до равнотеже то значи да сте мртви.*

Упркос свему, док се креће путањом осеке у правцу коначне равнотеже када ће свуда постојати само бљутава уједначена чорба максималне ентропије – васељена успева да створи занимљиве структуре. Како је могуће да бесциљни токови енергије нанесу живот и интелигенцију у свет?! Еволуција је хаос са повратном спрегом. Васељена је велика насумичност и стропоштавање према потпуном и коначном расулу. Али насумичност која се усмери може изазвати запрепашћујућу нову сложеност. Расипање и расуло су тајни агенти Реда.





Benoit B. Mandelbrot
francuski matematičar. 1979. otkrio je jednu od najfantastičnijih matematičkih tvorevina. Nazvao ju je **fraktal**, prema latinskoj riječi **fractus**, što znači **izlomljen**. Njegovim radovima 70-ih godina započela je era fraktala.

MANDELBROTOV SKUP

"Mandelbrotov skup je najsloženiji objekt u matematici, vole reći njegovi štovatelji. Vječnost nije dovoljna da ga se cijelog pregleda, njegovi diskovi načičkani su bodljikavim trnjem, njegove spirale i vlakna vijugaju uokolo i prema van, noseći mjehuraste molekule koje vise, beskrajno raznolike, kao grozdovi na Božjoj lozi."
(James Gleick)



imaginarna os
 yi
 $z = x + yi$
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
realna os
 x

Mandelbrotov skup je skup točaka kompleksne ravnine. Za svaku točku c kompleksne ravnine računamo niz:

$$z_1 = c$$

$$z_2 = z_1^2 + c$$

$$z_3 = z_2^2 + c$$

$$\dots$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$\dots$$

Ako je ovaj beskonačan niz ograničen, točka c pripada Mandelbrotovom skupu i crta se crnom bojom, a ako se taj niz kreće prema beskonačnom, točka ne pripada Mandelbrotovom skupu i crta se bijelom bojom. Pa otkuda onda šarenilo? U praksi, računalni programi provjeravaju prelazi li pojedina iteracija po modulu broj 2 (...if $|z| > 2$ then...). Ako ne prijede ni nakon zadanog broja iteracija, točka c se prikazuje crnom bojom, a ako prijede, točka c se prikazuje nekom drugom bojom, ovisno o koraku iteracije u kojem se to dogodilo. Na taj način nastaje fascinantno lijepa okolina skupa.

Osnovno svojstvo fraktala je samosličnost - manji dijelovi imaju strukturu cjeline.



$z_1 = c$
 $z_2 = z_1^2 + c$
 $z_3 = z_2^2 + c$
 \dots
 $z_{n+1} = z_n^2 + c$
 \dots

90806
Autor: S. Šušić
d.o.o. Mendelovića 2, Zagreb